CONSTRUCCIÓN DE CONOCIMIENTO MATEMÁTICO E INCLUSIÓN. EXPERIENCIA CON INDÍGENAS Y AFROCOLOMBIANOS EN LA UNIVERSIDAD DEL VALLE

César A. Delgado García (PhD)*

María Cristina Tenorio (PhD)º

> *Mi trabajo sobre la educación y clase social en los primeros años, por ejemplo, me ha convencido de que el sistema escolar es, en efecto, nuestra forma de mantener un sistema clasista (…); por lo que a los niños de la parte más baja de los niveles socioeconómicos se refiere, es un sistema que mutila su capacidad de participar con plenos derechos en la sociedad, mutilación que lleva a cabo de manera efectiva y a una edad muy temprana.*
>
> *Jerome Bruner*

RESUMEN: El aumento de cobertura en la educación superior hace visible el problema del alto porcentaje de fracaso académico en la universidad colombiana, de manera especial en la pública a donde llegan los jóvenes de estratos populares. Problema que está siendo contabilizado y estudiado como deserción estudiantil, pero que aún no ha sido bien diagnosticado. Las matemáticas y, particularmente, el modelo pedagógico que orienta su enseñanza, son parte de esta indeseable situación. En la búsqueda de una solución la Vicerrectoría Académica de la Universidad del Valle aprobó un proyecto de investigación (2006) el cual incluía el desarrollo de cursos pilotos de Cálculo, para una población multiétnica que generalmente abandona sus estudios universitarios en las carreras de ingeniería, en los dos primeros años. Se deseaba comprobar que, bajo ciertas condiciones educativas, en un año era posible transformar la *formación matemática* que, en general, resulta insuficiente para responder a las demandas del currículo de estas carreras. Para este objetivo, se propuso una *estrategia* didáctica *socioconstructivista* destinada a afectar las *actividades* de enseñanza y de estudio del Cálculo. Tal estrategia se implementó en el marco de un proceso de investigación-intervención. Se buscaba explicitar algunas acciones que pueden servir para diseñar estrategias educativas que brinden, una oportunidad *real* de asimilar conocimientos científicos y tecnológicos y responder a las exigencias académicas, que demanda la formación profesional en ingenierías. El resultado más destacado consistió en la reversión de la deserción, hoy después de seis semestres permanecen en los planes de ingeniería el 65% de los estudiantes del curso y varios han obtenido estímulos académicos.

---

* Departamento de Matemáticas. Universidad del Valle. Cali, Colombia, cedel@univalle.edu.co; cedelg@gmail.com

º Instituto de Psicología. Proyecto Universidad y Culturas - Vicerrectoría Académica, Universidad del Valle. uniculturas@univalle.edu.co, <cristenorio@cable.net.co>

INTRODUCCIÓN

El aumento de la cobertura educativa –acción necesaria de la sociedad contemporánea, para posibilitar bienestar y oportunidades reales de inclusión a poblaciones cuya trayectoria de vida está limitada por su origen social– hace visible la lentitud de respuesta de un sistema educativo que tradicionalmente ha trabajado en función de los más preparados y más dotados, pero que, actualmente, no logra responder al reto de atender a aquellos que, por su origen, tienen una *experiencia diferente* a la que se desarrolla en los ambientes más afines con el *modelo pedagógico tradicional*. Según los expertos,

> La expectativa social de que la escuela revierta los procesos de desigualdad social es empíricamente falsa… ; en ningún caso se observa una disminución espectacular de la herencia social en las trayectorias sociales y laborales de las nuevas generaciones respecto de las de sus padres (Pérez, 2001, p. 8).

Los documentos políticos sobre ampliación de acceso a la educación superior generalmente nos plantean que esta posibilita el ascenso social y económico. Sin embargo, no explican cuáles son los mecanismos que lo hacen posible. Poco a poco empieza a ser claro que si bien el diploma profesional mejora las condiciones de contratación, realmente su mayor poder no es éste sino el hecho de comprender y aprender a manejar las reglas del juego socioeconómico en las sociedades contemporáneas:

> […] aumenta las oportunidades de comprender el entorno cada día más ensanchado por los avances tecnológicos; permite participar en la vida social, política y económica de manera más operativa. … incorpora a sectores sociales antes excluidos a procesos culturales *y a significados simbólicos propios de los modos de vida contemporáneos. (Ibid).*

Por esta razón, hay que leer las altas tasas de deserción en la Educación Superior en todos los países de América que han ampliado masivamente la cobertura –aumentando el ingreso pero sin transformar el modelo pedagógico–, como el fracaso del sistema educativo en crear las condiciones académicas que harían posible la permanencia y graduación de los jóvenes. Un sistema educativo que no transforma las experiencias de jóvenes procedentes de familias antes excluidas de la educación media y superior, que no logra desarrollarles nuevas habilidades necesarias en el mundo académico, ni les ayuda a dominar las prácticas que la universidad exige para apropiarse del conocimiento formal, es un sistema que fracasa en su función social. En el nivel universitario colombiano la deserción es actualmente del 45% (según informes del Observatorio Nacional del Mineducación). Sin embargo, si la midiéramos por estratos socioeconómicos, encontraríamos que el mayor porcentaje de fracaso se presenta en los estratos populares, rurales y de poblaciones minoritarias. Es evidente que en Colombia los pobres no han tenido el tipo de experiencias que permite desarrollar *la mente* que la universidad exige.

Pérez (2001) denuncia las consecuencias de no analizar cómo funciona el sistema educativo y de suponer que todo es resultado de los talentos individuales:

> Parecería que el papel de la escuela es estrictamente académico y administrativo: fija objetivos cognitivos, planifica tareas, diseña estrategias pedagógicas orientadas por la eficacia, el cumplimiento y el éxito, con independencia de los usuarios de tales modelos educativos. ¿Será posible hacer el bien educativo sin saber a quién? Evidentemente no, se tienen suficientes datos de deserción, rezago e ineficiencia terminal en todos los

> niveles educativos, como para poner en cuestión esta visión. Si se mantiene como incuestionable esta perspectiva, el saldo negativo se transfiere directamente al individuo y a su familia. Son ellos responsables del fracaso escolar por no contar con las condiciones necesarias para cumplir con las expectativas institucionales, como si éstas dependieran de ellos. (Pérez, 2001, p. 3)

El estudio de la calidad de la educación que están recibiendo los niños y adolescentes revela que los factores estructurales se ubican en dos planos: el de la población estudiantil y el del sistema educativo.

Respecto al primer plano, se señalan factores *socioeconómico* y *sociocultural*es y en el segundo, se hace referencia a los modelos pedagógicos y a las estrategias curriculares que éstos definen.[1] Si bien con el SPADIES [Sistema para la Prevención y Análisis de la Deserción en las Instituciones de Educación Superior] el CEDE [Centro de Estudios sobre Desarrollo Económico de Uniandes] y el Ministerio de Educación Nacional han medido la incidencia en la deserción de las condiciones socioeconómicas, académicas e institucionales (MEN, 2008), los factores que ellos llaman institucionales no son estudiados como factores determinantes de buena o mala calidad educativa, sino como tipos de instituciones: pública o privada, técnica, tecnológica o universitaria. No se estudia ni analiza qué tipo de educación se está ofreciendo, menos aún se toma en cuenta cómo la masificación de todo el sistema educativo ha estado acompañada de un descenso notorio en los resultados de las pruebas de Estado. Para nosotros este punto es vital por cuanto reconocemos, como lo hace Jerome Bruner (2000), que el fracaso escolar "[…] es, posiblemente, menos una cuestión de habilidades por parte del estudiante que nuestro fracaso para comprender cómo enseñar…". En resumen, el problema de la permanencia comprende diferentes aspectos que hay que analizar en el momento de buscar estrategias para su solución.

Es en este último sentido como este problema está relacionado con el que ya hace más de veinte años denominamos "Problema del empalme entre las matemáticas de la secundaria y las de la universidad" (Delgado, et al. ERM. 1990), el cual se manifiesta en altas tasas de fracaso en los primeros cursos de matemáticas, de los alumnos que ingresan a los planes de ingeniería y ciencias. Incluso, es frecuente que los cursos básicos de Cálculo I, Cálculo II y álgebra lineal se repitan dos y tres veces. Uno de los factores que en los últimos años hace más visible la ruptura con las matemáticas del bachillerato es al aumento de cobertura de la universidad; en parte porque los grupos son cada vez más numerosos, y en parte porque no se toman en consideración las diferentes rupturas y contradicciones que se presentan entre los tres elementos del proceso: *el modelo pedagógico, la formación matemática previa de los estudiantes, y las condiciones objetivas* de la actividad de estudio del alumno. En particular, resulta preocupante que esfuerzos por ampliar la inclusión de grupos étnicos como lo indígenas y afrocolombianos en la educación superior[2] se pierdan porque al cabo de dos años la deserción de éstos en los planes de ingeniería sea casi del 63%.

Esta preocupación condujo a que la Universidad del Valle incluyera en su Plan Estratégico 2005-2015 una acción de acompañamiento a los estudiantes que ingresan por cuota de excepción étnica, a

[1] Compartimos la concepción de George Posner (1998) según la cual, "El currículo no es más que la concreción específica de una teoría pedagógica para volverla efectiva y asegurar el aprendizaje y el desarrollo de un grupo particular de alumnos para la cultura, la época y comunidad de la que hacen parte." (Posner, 1998, p. XXVI). Sin embargo, como Posner mismo reconoce, no es una propuesta hegemónica sino que es necesario reconocer la coexistencia de currículos diferentes en una misma institución. Para nosotros, el currículo se expresa en diferentes niveles: *currículo propuesto, enseñado* y *logrado.*

[2] La Universidad del Valle estableció una "cuota de excepción étnica" que reserva el 4% de todos los cupos de pregrado para la población indígena –desde 1993– y afrodescendientes –a partir de 2004.

cargo del proyecto *Universidad y Culturas*. La gravedad de las deficiencias en la formación escolar de estos jóvenes, dificultó el buen resultado de los acompañamientos con tutores, por lo cual en el 2006 se implementó un Plan Nivelatorio Piloto en Español y en Matemáticas, con el apoyo de profesores, asistentes de investigación, practicantes, tutores y monitores de cinco Facultades. La experiencia fue financiada por la Vicerrectoría Académica.

Dos cursos piloto de Cálculo I y Cálculo II, que contaron con el apoyo del Departamento de Matemáticas, hicieron parte del plan nivelatorio. Se tomó la decisión de matricular a los primíparos de la población indígena y afrodescendientes de las carreras de ingeniería en un mismo grupo de Cálculo I. El trabajo duró un año. Los cursos se plantearon como un proceso de investigación-intervención diseñado e implementado con el objetivo de proporcionar una oportunidad **real** a los *estudiantes que ingresan por condición de excepción étnica a los planes de ingenierías, de acceder a los conocimientos científicos y tecnológicos* y de responder a las exigencias académicas, de alto nivel, que demanda la formación profesional en ingenierías. Estas *condiciones* están relacionadas, principalmente, con:

- La transformación de las prácticas de enseñanza tradicionales,
- La transformación de las prácticas de estudio de los alumnos y,
- El respeto por los ritmos de aprendizaje del estudiante

Nuestro principal interés era experimentar una posible estrategia para resolver la ruptura entre el modelo pedagógico universitario y la formación matemática previa de esta población.

Nuestra hipótesis de trabajo fue, como lo había sido en el pasado, que el problema no se resuelve pensando en la introducción de nuevos contenidos, sino que *su solución depende de qué tanto se logre transformar la cultura dominante que guía la actividad en el aula de matemáticas*: centrada, de un lado, en la explicación del profesor y en la simplificación de las dificultades inherentes al aprendizaje de conceptos matemáticos; y, del otro, en la imitación de modelos y sus aplicaciones a problemas de "*diseño*"[3].

El principal resultado, cuantitativo, de este proyecto consistió en revertir *la deserción que para la población de indígenas y afrocolombianos que ingresó en el 2005 a ingenierías fue del 62,5%, al cabo de cuatro semestres a una permanencia del 65% de la población objeto de nuestra experiencia, al cabo de cinco semestres*.

El resultado, cualitativo, más destacable radicó en *la transformación sensiblemente positiva de la formación matemática de la población objeto.* Siendo la conclusión más importante, que *es posible incluir en el proceso educativo de nivel superior a poblaciones que ingresan a la universidad con bajos y muy bajos niveles de formación matemática*, con la condición de disponer de una estrategia didáctica que aborde con seriedad y responsabilidad social la educación matemática. Pero, sobre todo, si tal estrategia es un compromiso institucional y responsabilidad de un equipo de profesores sensibilizados y preparados para enfrentar el reto de educar matemáticamente a los futuros profesionales.

[3] Este término es acuñado (Rusbult, 2000) para significar los problemas que para su solución sólo demandan conocimientos ya instalados en el repertorio del solucionador. Se contrasta con problemas de solución "*creativa*" en los que el solucionador no dispone de cierto(s) conocimiento(s) necesario(s) para la solución y debe, por tanto, imaginarlos. Un problema se dice *creativo* si demanda la construcción de conocimientos inéditos para el estudiante ya sea por recombinaciones novedosas de sus actuales conocimientos o por abstracción de nuevos conocimientos a partir de las coordinaciones generales de sus acciones cuando actúa sobre una situación que requiere de un conocimiento específico.

MASIFICACIÓN Y PRÁCTICAS ESCOLARES

En Colombia en los últimos 50 años se ha pasado de una escolaridad para minorías a una escolaridad masiva. De pocos bachilleres que se formaron con la ayuda de "maestros" comprometidos con la enseñanza, que exigían el compromiso de sus alumnos y creaban hábitos de estudio, se ha pasado a graduar a jóvenes que, en su mayoría, no lograron ser motivados por el aprendizaje y menos por desarrollar estrategias que optimizaran su actividad de estudio. Los cambios en el sistema de evaluación de la escolaridad básica y media en 1994, y el afán de retener en el sistema escolar al mayor número posible de alumnos, para mostrar altas tasas de cobertura (Decreto 230 del 2002, bien apodado "de promocion automática"), nos hicieron pasar de un bachillerato para los mejores (meritocrático) a un diploma de bachiller para cualquiera que asista al colegio, aunque no aprenda sino a responder al *tipo de preguntas* del nuevo examen de Estado ICFES.

Respecto a las prácticas de enseñanza

A medida que aumentó el número de jóvenes que ingresa a las universidades, se masificaron los estilos de enseñanza con la consecuencia de volver, por fuerza de las nuevas circunstancias, canónicas las maneras de enseñar tradicionales.[4] El profesor recibió el impacto del aumento de cobertura; varias razones contribuyen a desmotivar a los docentes que intentan sostener el compromiso con la docencia y promover en los jóvenes un interés por el conocimiento:

a) Las condiciones de asignación de cursos impiden la interacción: hasta mediados de los años 90 los cursos de matemáticas tenían un cupo de 30 alumnos; ahora son de 60 cupos, cuando no se trata de magistrales para el doble o triple de esta población. Buscar participación y actividad de los jóvenes con estos grandes grupos se vuelve cada vez más difícil.

b) Los jóvenes que ahora ingresan están muy distantes del conocimiento requerido por los cursos universitarios iniciales; aún con la mejor voluntad, el profesor no tiene cómo afianzar los temas universitarios de los cursos sobre el vacío en la mente de sus alumnos.

c) Con frecuencia los profesores comprometidos se sienten derrotados por jóvenes que no atienden, y que fracasan sistemáticamente en sus esfuerzos por entender; como tampoco tienen hábitos de lectura y estudio, no consultan los textos que los profesores les proponen.

d) Con los cambios administrativos eficientistas de las universidades, los profesores tienen que dictar cada vez más cursos, investigar más, publicar, organizar y participar en eventos académicos. Así, en este modelo la enseñanza se ve afectada cuando las otras actividades se ponderan en términos salariales.

La misión del profesor actual es transmitir lo más eficientemente posible los contenidos de un programa fijo, con fechas calculadas para cada tema Lo cual lo obliga a sostener un flujo expositivo de gran velocidad, para alcanzar a cubrir todos los temas del programa; es decir, que los expone velozmente ante una masa a la que no conoce y con la que no interactúa, y al final de cada período comprueba *cuánto retuvieron*.

[4] Enseñanza vertical, transmisionista, centrada en la explicación y la imitación de modelos. Esta manera de enseñar permite el control sobre los contenidos a cubrir en el tiempo que se asigna oficialmente, pero descuida el control sobre lo que el estudiante realmente aprende y la calidad de su aprendizaje.

Es necesario transformar las prácticas de enseñanza tradicionales. El profesor que enseña matemática, en el marco del modelo pedagógico tradicional, es un portador de información especializada cuya función principal consiste en *exponer y explicar* los conceptos y modelos matemáticos propios de los cursos de cálculo, proponer buenos ejercicios y problemas de “diseño” y *evaluar* las apropiaciones de contenidos de la información. Este profesor demanda de sus alumnos, un esfuerzo por evocar y coordinar los elementos y procesos de la teoría que él previamente le ha presentado.

Respecto a las prácticas de estudio

Quienes llegan a los cursos de matemáticas en los primeros semestres de carrera –Matemática básica o Fundamental Cálculo I y II, etc.– son jóvenes que ya vienen modelados por su escolaridad previa, en lo relativo a su papel de estudiantes. En el colegio aprendieron que ser estudiantes es asistir a clases, simular que atienden y entienden las explicaciones, entregar los trabajos (así no los hayan producido ellos), y memorizar a última hora lo que el profesor pidió aprender; entre sus obligaciones estudiantiles no figura aprender seriamente los conocimientos propuestos en el programa escolar. De allí que cada vez sea mayor el desnivel entre lo que los cursos universitarios requieren como base necesaria de información en las áreas de conocimiento del currículo, y lo que los estudiantes traen como capital académico; problema potenciado por el hecho de que los estudiantes son los últimos en reconocer que no estaban listos para los cursos que matricularon. Pero además, este entrenamiento de años para “aprender sin esforzarse”, sin asumir como su tarea personal el aprendizaje, les hace creer que en las aulas universitarias pueden asumir la misma postura.

Respecto a las diversas actividades que componen el aprendizaje en la universidad y a la manera como las nuevas generaciones las cumplen o no, tanto nuestro grupo como otros investigadores hemos hecho hallazgos muy preocupantes.

Adrián de Garay, en su investigación del 2004 sobre las *prácticas sociales, académicas y de consumo cultural* de los estudiantes de 3 sedes de la Universidad Autónoma Metropolitana de México [Estudio etnográfico y cuantitativo para una población de 35.000 estudiantes], al analizar las prácticas académicas, agrupándolas en 6 dimensiones, encontró que el cumplimiento más alto se da para las actividades meramente formales. Él unió la frecuencia de asistencia a clase y la puntualidad para asistir a clase en una dimensión llamada: *Responsabilidad Formal*, y encontró que en las 3 sedes de la UAM esta es la dimensión que obtiene un cumplimiento más alto. [Lo que corrobora nuestros hallazgos: para la mayoría de estudiantes, hoy en día su responsabilidad fundamental consiste en asistir a clases.] Sólo que aquellos factores que dan sentido a la asistencia a clases no puntúan alto en la investigación de Garay; en la dimensión *Presencia activa en clases* incluyó: frecuencia con que pregunta en clase, frecuencia con que prepara la clase, y frecuencia con que discute los puntos de vista del profesor; como era de esperarse es mucho más frecuente preguntar en clase, que preparar la clase y menos aún discutir. La dimensión *Inversión de tiempo en el estudio* incluye tiempo semanal de lectura y tiempo semanal de trabajos para la universidad (que incluye tareas); sólo 10.3% dedican tiempo alto; inversión media 22.5%; inversion baja, 37%; inversión muy baja, 30.3%. Es decir que 67.3% de los estudiantes dedican un mínimo de tiempo, pues gastan su tiempo por fuera de clases en transportarse hacia y desde la universidad (2 a 3 horas diarias), en cumplir con responsabilidades laborales, en labores caseras, y en actividades de consumo cultural; la mayor parte no tiene un tiempo fijo y amplio dedicado a leer, a escribir sobre lo que leen, ni para elaborar trabajos. Para otra dimensión, *Producción sistemática* (Elaboración de resúmenes y fichas), la mayor frecuencia se ubica en media: 60%. De allí que otros puntajes muy dicientes sean los de la última dimensión: *Producción analítica* (elaboración de diagramas y de esquemas), que puntuó así: alta: 13.9%; media 34.1%; nula 52%. Estos hallazgos dan cuenta del inmenso cambio en lo que significa en el día a día ser estudiante universitario.

Sobre estos hallazgos concluye Garay:

> El sistema educativo mexicano, desde la educación básica hasta el nivel superior, no ha propiciado entre amplios sectores la incorporación de los hábitus del arte de organizar su trabajo y su tiempo de estudio, de proporcionarles los instrumentos y las técnicas de trabajo suficientes para el desarrollo de las habilidades y capacidades intelectuales propias de la vida académica, en particular de aquellas conducentes a la realización de prácticas escolares con una mayor exigencia cognitiva. (Garay, 2004, p. 117-118).

Por nuestra parte, hemos hecho 3 investigaciones sobre la manera como asumen la escolaridad los adolescentes en los colegios de educación secundaria (en dos instituciones educativas de Cali y en dos reguardos indígenas del Cauca), y 3 más en la Universidad, de las cuales 2 se han hecho con estudiantes de Ingeniería, haciendo entrevistas en profundidad a estudiantes y profesores, observaciones etnográficas en clase, talleres, encuestas cualitativas amplias y seguimientos académicos. Además de todo el trabajo de acompañamiento a los estudiantes indígenas y afrodescendientes entre 2005 y 2008, y el análisis de los logros y dificultades en los cursos del plan nivelatorio. Estas son las bases de nuestras afirmaciones, más nuestros propios aprendizajes al ejercer la docencia a lo largo de tres décadas y al analizar los cambios en la población estudiantil y en las condiciones para ejercer la enseñanza universitaria.

* Los estudiantes actualmente consideran que su principal responsabilidad, una vez ingresan a la universidad, consiste en asistir a las clases y talleres y llegar a tiempo; escuchar lo que el profesor expone y copiar lo que escribe en el tablero o retroproyector. Es decir, se sumergen en actividades en las que su papel es pasivo, de receptores acríticos, sin que los profesores más comprometidos con la enseñanza logren moverlos de esta pasividad. Así, cuando el profesor deja ejercicios para resolver en casa, los resuelven a medias, sin consultar el libro guía para tratar de comprender por su cuenta, pues para ellos todo el aprendizaje se debe dar en el aula. De vuelta a clase, cuando el profesor busca que participen con preguntas, sólo piden que él resuelva el ejercicio Nº X o el Nº Y, sin siquiera nombrar el concepto que no saben aplicar, ni pensar. Los estudiantes están seguros de que el trabajo que ellos deberían realizar por fuera del aula de matemáticas, lo pueden sustituir por el trabajo que hace el profesor cuando les explica los problemas que ellos no lograron hacer. Y el profesor no se resiste a hacerlo, porque implícitamente cree que un buen profesor debe dar las explicaciones pedidas.

* Los estudiantes saben que si no entienden lo que el profesor está explicando esto no detendrá la clase, así todo el grupo no logre entender; que es problema de cada uno aprender lo enseñado, aunque no se haya comprendido, pues todos aceptan que “cálculo es muy difícil”. Por supuesto, este “aprender” cada uno lo entiende como le conviene (porque lo tranquiliza): el profesor espera que sepan resolver los problemas que les propondrá en los exámenes; no se pregunta qué tipo de aprendizaje están haciendo, ni para qué les sirve esta mecanización; tampoco se pregunta si éste es un aprendizaje superficial de corta duración (que se olvidará en pocos días), o si es un aprendizaje que transforma lo que el estudiante pensaba, pues le exige cuestionar lo que sabía *para avanzar a otro nivel de formalización del conocimiento matemático.*

* Suponen que las clases de matemáticas no son para discutir sobre los temas explicados, ni les interesa hacerlo. No se preocupan por sostener discusiones teóricas y las rechazan, porque las consideran innecesarias; para ellos lo conceptual “es carreta” que hace perder el tiempo, pues lo que importa son las aplicaciones, un saber-hacer sin teoría, o sin razones, como diría Piaget. Consideran que lo importante es poseer “verdades”, ya empaquetadas en fórmulas y con manual de uso. Esta posición es consecuencia del modelo pedagógico tradicional que hemos caracterizado.

ESTRATEGIA DIDÁCTICA SOCIOCONSTRUCTIVA

Los estudios que acabamos de exponer muestran que los alumnos debe superar los obstáculos creados por una cultura perezosa canonizada en el aula de matemáticas, que descansa en la magia las fórmulas teóricas y algoritmos con los que se resuelven ciertos tipos de problemas, estimulando con ello al "dígame como se hace", antes que propiciar situaciones de acción en la dirección opuesta: que obedezcan a la necesidad de construir cierto conocimiento para resolver un problema. Se trata entonces de modificar hábitos y creencias; abrir las puertas del aula de matemáticas a prácticas que hagan necesario el recurso a los *lenguajes matemáticos* para plantear y resolver problemas, promueva la *imaginación* de hipótesis y *el razonamiento* regulado por la lógica para validar aquello que se revela por la acción y la intuición. En consecuencia nuestra estrategia didáctica toma el nombre de socioconstructivista para señalar el marco teórico que orienta la respuesta a los conflictos que surgen cuando nos lanzamos en la aventura de recuperar el "*eslabón perdido*", como lo llama Yves Chevallard, entre la enseñanza y el aprendizaje: la *actividad de estudio*.

Ante todo, creemos que es importante ejercer una *epistemología militante* que permita contrastar nuestras acciones con los hechos y la teoría. En este sentido conviene separar nuestra posición de las concepciones empiristas y racionalistas y plantear nuestro convencimiento que, como ya lo expuso Jean Piaget en su epistemología genética: "el conocimiento no es copia de lo real" ni es el producto de la mera intuición y racionalidad humana, pero sí una construcción producto de "equilibraciones incrementantes" en la que *la protagonista principal en los intercambios entre sujeto y medio es la acción organizada y significada desde el lenguaje* y no, como plantean empiristas y racionalistas, los instrumentos perceptivos del ser humano. Conviene, además, subrayar que ubicar la acción en el centro de los conocimientos no significa como lo afirman Piaget y Rolando García,

> […] que debamos considerar solamente el desarrollo del sujeto frente a un objeto que está "dado" independientemente de todo contexto social. En la interacción dialéctica entre el sujeto y el objeto, este último se presenta inmerso en un sistema de relaciones con características muy diversas. Por una parte, la relación sujeto-objeto puede estar mediatizada por las interpretaciones que provienen del contexto social en el cual se mueve el sujeto (relaciones con otros sujetos, lecturas, etc.). Por otra parte, los objetos funcionan ya de cierta manera –socialmente establecida– en relación con otros objetos o con otros sujetos. En el proceso de interacción, niel sujeto ni el objeto son, por consiguiente, neutros. (Piaget & García, 1982, pp. 244-245)

En consecuencia, dado que Piaget, como lo afirma el mismo Jerome Bruner, tuvo en cuenta pero no desarrolló este aspecto de la influencia sociocultural en los procesos del desarrollo, nosotros adoptamos una posición ecléctica que permite llenar este vacío y tomar para nuestra estrategia socioconstructiva elementos fundamentales de la teoría de Lev Vigotsky y de los aportes de Bruner respecto a las formas de representación de la experiencia humana.

Algunos elementos teóricos

Aceptando que conocer es actuar y más específicamente "*comparar y transformar*", lo primero es expresar que creemos que el problema de cómo los seres humanos representan su experiencia es crucial si se quiere incidir en los procesos y mecanismos cognitivos que hacen posible el pensamiento matemático. Según Bruner

> Hay tres tipos de sistemas de representación que operan durante el desarrollo de la inteligencia humana… Podemos representar algunos sucesos *por las acciones* que requieren, mediante *una imagen*, mediante *palabras o con otros símbolos.* Estos tres modos son la representación *enactiva*, la representación *icónica* y la representación *simbólica:* conocer algo por medio de la acción, a través de un dibujo o una imagen y mediante formas simbólicas como el lenguaje. (Bruner, 1979 p. 122)

Para Bruner, no se trata de etapas sucesivas, sino de "un dominio progresivo de estas tres formas de representación y de su traducción parcial de un sistema a otro", dominio que debe promoverse desde la niñez a través de las actividades educativas. Sin embargo, según las condiciones de vida familiar y el tipo de escuela al que tienen acceso, algunos niños tendrán apoyo para dominar pronto sistemas simbólicos complejos, mientras otros seguirán aprendiendo con rutinas basadas en la acción. Los jóvenes a los que la escuela no logra afectar de manera satisfactoria su desarrollo de pensamiento formal, sin embargo, espontáneamente desarrollan una inteligencia, cuyo pensamiento predominantemente práctico es ágil, recursivo y eficaz para manejar su mundo cotidiano. Estos jóvenes al llegar a la Universidad tienen dificultades para actuar sobre objetos abstractos desnudos de contextos concretos, que son propios del discurso académico.

En concordancia con esta teoría, el reto para la *mediación educativa* es encontrar una manera de *apoyarse en la experiencia de los alumnos* y en su *inteligencia práctica* para desarrollar un pensamiento formal matemático que es un subsistema del sistema de representación simbólico (Tall, 1995) y que interacciona, en concordancia con las demandas del medio y los fines de la acción, con los otros sistemas de representación utilizando imágenes mentales u otras representaciones icónicas y también en acciones prácticas, para obtener el éxito.

Igualmente es fundamental para nuestra estrategia el reconocimiento de que el aprendizaje de los estudiantes *exige mediaciones que se ubiquen en un nivel cercano a su comprensión*. Es decir, que las típicas explicaciones de alto nivel del profesor o del libro por lo general no afectan a los alumnos que están ingresando a la universidad porque les resultan "densas" –incomprensibles, porque son ajenas a sus experiencias previas en esa área de conocimiento y a lo que han pensado– y por tanto "no hacen contacto". Se requiere por tanto crear un andamiaje que acerque los dos mundos, un andamiaje que se construye en la *Zona de Desarrollo Próximo,* en la terminología de Lev Vigotsky (1996, pp. 181-186). Se trata entonces de un segundo reto que se plantea en términos de lograr el trabajo del alumno sobre sí mismo para darse forma –formar*se*.

Nuestra experiencia docente y los estudios que hemos realizado, igual que los resultados que expusimos en el apartado anterior, nos enseñan que el principal problema que hay que enfrentar en el aula de matemáticas –y también en la de otras materias– más que los vacío de conocimiento y los bajos niveles de formación matemática, es la resistencia de los alumnos a modificar hábitos que obstaculizan el aprendizaje. En particular, creencias, respecto al aprendizaje, como la que les hace pensar que el mejor profesor es el que "explica bien" o que confunden la actividad de estudio con el "asistir a clases". La manera de superar la resistencia es imponiendo prácticas centradas en la *actividad de estudio* de los alumnos que respete sus ritmos de aprendizaje, que reconozcan la importancia de la producción social del conocimiento. Esto último significa también superar resistencias que se generan por los marcos pedagógicos tradicionales que se han canonizado como los únicos viables en un sistema educativo de calidad. En resumen, nuestro principal problema es diseñar una estrategia que partiendo de la transformación de las prácticas de estudio y las de enseñanza logren provocar un gran salto cualitativo en la formación matemática de los alumnos –y con ello afectar su manera de representarse los objetos de conocimiento y de actuar sobre objetos abstractos y descontextualizados en escenarios formales.

Transformación de las prácticas de enseñanza

Un medio para responder a esto dos retos lo constituye la teoría de situaciones de Guy Brousseau (1986). Esta teoría obliga a transformar el papel tradicional del profesor de matemáticas y a reorientar su actividad hacia el *diseño de situaciones*[5] que son verdaderas recontextualizaciones del conocimiento que se desea enseñar y cuya solución sólo es posible por un proceso constructivo de ése conocimiento –a cargo del alumno– apoyado por la "*mediación didáctica*" del profesor.[6] Tal mediación, se constituye en torno de las "*devoluciones de problemas*"[7] a los alumnos que el profesor va construyendo en la "*interactividad*"[8] con el objetivo de provocar el compromiso del repertorio de conocimientos de los alumnos en concordancia con la tarea.

Este compromiso se realiza en el contexto de las *situaciones adidácticas*, entendiendo por tales

> «[…] una situación matemática específica de dicho conocimiento tal que, por sí misma, sin apelar a razones didácticas y en ausencia de toda indicación intencional, permita o provoque un cambio de estrategia en el jugador. Este cambio debe ser (relativamente) estable en el tiempo y estable respecto a las variables de la situación. La forma de "provocar" este cambio suele provenir de ciertas características de la situación adidáctica que hacen que fracasen las estrategias espontáneas. (Chevallard, Y., Bosh, M., y Gascón, J, 1997. p. 215)

Brousseau (1986) identifica tres tipos de situaciones adidácticas:

- *Acción:*

> Es una situación donde el conocimiento del sujeto se manifiesta solamente por decisiones, por acciones regulares y eficaces sobre el medio y donde es insignificante

---

5 "Una situación modela lo que está en juego y las posibilidades de decisión de un actuante en un determinado medio. Se elige de tal manera que la estrategia de resolución no pueda aplicarse sino gracias a un determinado conocimiento matemático, la aparición de esta decisión sin el uso por el actuante del conocimiento contemplado es altamente improbable." (Brousseau, 2003, p. 2).

6 Así, Brousseau considera que el profesor planifica su enseñanza en un marco didáctico que se fundamenta en el diseño de situaciones matemáticas que se gestionan por medio de situaciones didácticas de "devolución de problemas" e institucionalizaciones del conocimiento producido en el aula de matemáticas. Estas situaciones didácticas buscan provocar la acción de los alumnos que se despliegan en situaciones que Brousseau denominó adidácticas para indicar que están a cargo de los alumnos sin "obedecer a indicaciones didácticas" por parte del profesor.

7 Siguiendo a Brousseau (2003), es el proceso que realiza el profesor para provocar que "la acción del alumno sea producida y justificada sólo por las necesidades del medio y por sus conocimientos, y no por la interpretación de los procedimientos didácticos del profesor" (p. 5).

8 Este término es importante en nuestro modelo didáctico y se refiere a: "[...] *la articulación de las actuaciones de los profesores y los alumnos* (o del adulto y del niño, en el caso de situaciones educativas no escolares) *en torno a una tarea o un contenido de aprendizaje determinado*, supone pues una llamada de atención sobre la importancia de analizar actuaciones de los alumnos en estrecha vinculación con las actuaciones del profesor; y recíprocamente. (Coll, C., y otros 1995. p. 204)

para la evolución de las interacciones con el medio que el actante pueda o no identificar, aclarar o explicar el conocimiento necesario (Brousseau, 2003, p.3)

- *Formulación*

  Es una situación que pone en relación al menos dos actuantes con un medio. Su éxito común exige que uno formule el conocimiento en cuestión (bajo una forma cualquiera) con la intención del otro que lo necesita para convertirlo en decisión eficaz sobre el medio. La formulación consiste para esta pareja de actuantes en utilizar un repertorio conocido para formular un mensaje original, pero la situación puede conducir a modificar este repertorio. Podemos deducir teóricamente y verificar experimentalmente que una formulación «espontánea» de conocimiento exige que este conocimiento exista previamente como modelo implícito de acción en los dos actuantes. (Ídem, p.3))

- *Validación*

  Una situación de validación es una situación cuya solución exige que los actuantes establezcan conjuntamente la validez del conocimiento característico de esta situación. Su realización efectiva depende pues también de la capacidad de los protagonistas de establecer juntos explícitamente esta validez. (Ídem, p.4)|

Estas situaciones están relacionadas con la situación matemática propuesta en las cuales se han establecido ciertas “variables didácticas” –aspectos formales de la situación matemática– “que pueden ser manipulados por el profesor” y que obligan al actuante a un cambio de estrategia.

De la interacción alumno-medio y de la mediación del profesor, se espera que surja el *conflicto cognitivo* entre aquel conocimiento que el alumno cree necesario y suficiente para resolver el problema y las resistencias que opone la situación, que obligan a construir y discutir nuevos *posibles,* –o un conflicto entre conocimientos ya establecidos en la mente del alumno que resultan contradictorios entre sí. Este conflicto requiere, para su superación, alcanzar lo que en el progreso de la interactividad se ve como conocimiento *necesario,* y luego, una vez establecido, ponerlo a prueba y validarlo: sea en acto (prueba en acto), o recurriendo a validaciones icónicas (pruebas visuales) o conceptuales (por manipulación o pruebas euclídeas) o, si es el caso, producir una prueba formal (Tall, 1995b). El estudiante construye nuevo conocimiento –para él, pues ya existe como conocimiento institucional. Este conocimiento “nuevo” es reconocido como válido y útil en el marco de la institución escolar que representa el profesor, en un proceso denominado *institucionalización* –la institucionalización y la devolución del problema constituyen lo que Brouseeau denomina *situaciones didácticas*.

> Pero [la institucionalización] está, obviamente, fundamentalmente vinculada al proceso didáctico y resulta de una intervención específica. Es ella la que permite al profesor y al alumno reconocer y legitimar «el objeto de la enseñanza», si lo ven de maneras diferentes. Puede consistir en el reconocimiento por el profesor del valor de una producción de los alumnos.
>
> Afirma entonces: (1) que la propuesta del alumno es válida y reconocida como tal fuera del contexto particular de la situación presente, (2) que servirá en otras ocasiones, aún no conocidas, (3) que será entonces más ventajoso reconocerla y utilizarla bajo su forma esquematizada que establecerla de nuevo, (4) que será aceptada directamente por todos o al menos por los iniciados. (Brousseau, 2003, p. 5)

En esta estrategia de enseñanza, la *evaluación* es ahora sistémica-formativa y permanente: *se evalúan los resultados de la interactividad* en el marco del funcionamiento de los subsistemas (Alumno)-(situación adidáctica), (Profesor)-(situación didáctica), que son constitutivos del sistema didáctico que los engloba.

Transformación de las prácticas de estudio

Nuestra estrategia propone otro papel para el alumno; éste no será un *receptor* de soluciones ya elaboradas –para los problemas que en algún momento de la historia se plantearon los matemáticos y, luego, formalizaron en axiomas, definiciones, teoremas y algoritmos– que él debe memorizar y cuyo funcionamiento él *imita* del modelo que proporcionan las presentaciones y explicaciones del profesor, sino que pasa a ser un *constructor de su propio conocimiento matemático* resolviendo *problemas creativos* cuyas restricciones, en relación con los conocimientos que libremente pone en juego el alumno, hacen que cierto conocimiento sea necesario para alcanzar el éxito.

Esta empresa, de ser constructor de su propio conocimiento, le demanda invertir tiempo en lo que se llama período de *familiarización* con los elementos relevantes de la situación, que lleva a reconocer y plantear la existencia de un problema; luego, es necesario realizar un duro trabajo en el que el alumno utiliza su repertorio de conocimientos y fracasa, por no disponer del conocimiento necesario para la situación. Según los expertos y los testimonios de los mismos matemáticos, se sigue un período de *incubación* en el cual trabaja el inconsciente y termina cuando, como dice Poincaré (1913) [9], este trabajo se manifiesta en un "momento repentino" de "*iluminación*" en el cual la solución aparece "como si surgiera de la nada" y, finalmente, un último periodo de *verificación* en el cual los resultados, que la iluminación presenta sólo *groso modo*, se enuncian con precisión: "[,,,] los cálculos efectivos, que requieren disciplina, atención, voluntad y por tanto, conciencia, dependen del segundo período de trabajo consciente que sigue a la inspiración…. […] inseparable de la primera, la verificación." (Hadamard, 1947., pp. 103-104)[10]

En consecuencia con lo dicho, la estrategia que orienta las acciones del alumno y del profesor en torno de la construcción de conocimiento hace necesaria cierta flexibilidad en el manejo de los *tiempos oficiales* asignados para cubrir las temáticas de los programas de tal manera que sea posible acompasar los contenidos a los *ritmos de aprendizaje* de los estudiantes, a la vez que se operan ciertas transformaciones en su formación matemática y sus concepciones sobre el aprendizaje y sobre las matemáticas –concepciones que, en la mayoría de los estudiantes, son negativas y muy arraigadas por la cultura que se desarrolla en las aulas de matemáticas tradicionales.

Nuestro reto consistió en integrar al aula de matemáticas aspectos como la *invención* y el *asombro*, la *intuición* y la *validación*, el *razonamiento* y la *lógica*, la *predicación* y los *conceptos*, los *juicios* y los *lenguajes* matemáticos, bajo el supuesto que estos aspectos son constitutivos de la *actividad de estudio* que realiza tanto el matemático cuando construye matemáticas nuevas como los estudiantes

---

[9] Henri Poincaré, (1854-1912) Importante matemático francés que escribió numerosas obras de matemáticas y física. Fue premiado por sus trabajos sobre el problema de los tres cuerpos. Además, fue profesor de matemáticas y física en la universidad de la Sorbona y se preocupó por la enseñanza de las matemáticas. Escribió la obra *Mathematical Creation* (1913), que es muy citada.

[10] Jackes Hadamard (1865-1993). Notable matemático francés (1945), su libro *Psychology of invention in the mathematical field.* (1945), es un referente cuando se estudian los procesos de pensamiento matemático.

que aprenden matemáticas. Tales aspectos son necesarios para la creación de nueva matemática. Y, surgen de nuestra profunda convicción, que encontramos también en Hadamard (1947), respecto a que *la diferencia entre la actividad que permite crear nueva matemática* a los matemáticos, *y la actividad de los alumnos* que construyen conocimiento matemático nuevo, para ellos, *no es más que de grado*.

CONFORMACIÓN DE LOS EQUIPOS DE TRABAJO

El docente a cargo de los cursos piloto en Cálculo I y II contó, en Cálculo I, con el apoyo de tres asistentes de docencia, estudiantes de la Maestría en Matemáticas de la Universidad del Valle, y un comunicador social con quienes se conformó el equipo para desarrollar el curso dirigido a 61 estudiantes matriculados, de los cuales 23 eran repitentes (13 por primera vez y 10 por segunda vez); se formaron 3 subgrupos para los talleres con los 3 asistentes. De los 61 estudiantes que iniciaron, aprobaron 29 (47,5%) y reprobaron 32 (52,5%). Se hicieron registros audiovisuales de todas las clases, que junto con las tareas semanales revisadas y el reporte semanal de dificultades y obstáculos cognitivos que elaboran los 3 asistentes, constituyeron el principal insumo para el trabajo de investigación.

El equipo docente que tuvo a su cargo el curso piloto de Cálculo II, durante el semestre febrero-junio de 2007, estuvo conformado por el profesor titular y una asistente de docencia, estudiante de la Maestría en Matemáticas. Se hicieron registros audiovisuales de las clases que dan cuenta precisa de los tipos de interacción. El curso de Cálculo II, se extendió hasta incluir el período de verano (4 semanas con 6 horas diarias –4 de teoría, 2 de taller, y horas adicionales de trabajo individual). Esta extensión fue pactada con los estudiantes, quienes debieron renunciar a sus vacaciones para avanzar en conceptos de Cálculo II que no se habían estudiado aún. En la sección de verano el equipo docente lo conformó el profesor titular del curso, y una asistente, graduada en matemáticas, encargada de los talleres.

DESARROLLO DE LOS CURSOS Y EXPECTATIVAS DEL EQUIPO DOCENTE

En el curso de Cálculo I –5 horas/semana, 4 créditos– se cubrieron los temas: lógica; conjuntos y operaciones con conjuntos; conjuntos numéricos; estructura algebraica y orden de los números reales; resolución de ecuaciones e inecuaciones; método de las coordenadas; introducción a funciones. El programa oficial no contempla los tres primeros temas y los otros sólo corresponden a su tercera parte. Nos quedaba por cubrir los temas de funciones polinómicas, trigonométricas, límite, continuidad, derivada y sus aplicaciones. Además habría de cumplirse con el programa de Cálculo II –5 horas/semana, 4 créditos–: integración en una variable, función exponencial y logarítmica, sucesiones y series.

Guías de Apoyo Teórico y Guías de Trabajo

Los dos cursos se desarrollaron en torno a dos tipos de Guías: de "*Apoyo Teórico*" y guías de "*Trabajo*" y el texto de Tom Apostol, *Calculus,* Tomo I. Desde una perspectiva constructivista, la gestión de los diferentes temas del programa se piensa en torno a *situaciones* –prácticas y teóricas– que hacen *necesario* un saber matemático específico (**C**), que no poseen los estudiantes, pero que es posible alcanzar cuando el alumno trabaja sobre un *conjunto fundamental de situaciones matemática*s **S**(**C**) = {S_1, S_2, S_3,..., S_n} –en las que se ha recontextualizado **C.** El estudiante deberá aplicar sus conocimientos actuales (**Ĉ**), que en primera instancia son insuficientes para resolver cada una o algunas de las situaciones S_i, para i=1, 2,..., n. Esta limitación de **Ĉ** plantea un problema (**P**) al alumno como consecuencia de la diferencia entre *el saber* **C** *necesario* y los conocimientos **Ĉ** disponibles en el momento de iniciar la secuencia didáctica (**P** = **C**–**Ĉ**); el problema se resuelve cuando **Ĉ** iguala a **C**.

La afirmación, *a priori,* que acabamos de hacer respecto a que a los estudiantes les es "*posible alcanzar*" el conocimiento **C** *es relativa* al *estado de los conocimientos,* **Ĉ**, que en el momento ellos dispongan, y a la *mediación* del profesor y de los orientadores del taller. Nos referimos a la Zona de Desarrollo Próximo –distancia cognitiva entre lo que el sujeto puede hacer a solas y lo que realiza con la ayuda de un experto– en la que: "[...] los conceptos espontáneos, faltos de control consciente y volitivo, encuentran dicho control,..., con la cooperación entre el niño y los adultos" (Ídem, p. 185); en nuestro caso el alumno y los profesores, en torno a **S**(**C**).

En el escenario que acabamos de describir, *La Guía de Trabajo* define la estructura de la secuencia didáctica para enseñar **C** en torno al conjunto **S**(**C**). El papel de la Guía de trabajo es el de ser un instrumento que apoya la mediación de las acciones didácticas del profesor y las acciones adidácticas de los estudiantes, cuando las restricciones del medio en que se ha recontextualizado el conocimiento matemático a enseñar y a aprender hace necesaria, para el éxito de la tarea, una articulación de *las acciones del profesor* con las *acciones de los estudiantes* en torno a los objetos del conocimiento –interactividad (c.f. Coll, C. 1995). Dicho de otra manera, la guía es un instrumento que ayuda a influir en los procesos cognitivos del otro *para co-construir dominios de significados socialmente compartidos* –aprendizaje socioconstructivo.

Complementariamente a aquel papel de la Guía de Trabajo, dado su carácter potencial en la mediación, la *Guía de Apoyo Teórico* cumple dos funciones. La primera es *poner a disposición del usuario saberes matemáticos* de acuerdo con las necesidades técnicas que demanda la construcción de **C** y, la segunda, ofrecer una variedad de situaciones adidácticas[11] que se *ajusten* más al estado de conocimientos del alumno –ligeramente por encima de los conocimientos actuales–, cuando las situaciones propuestas en la Guía de Trabajo superan el desarrollo potencial del alumno. En resumen, el profesor *ajusta sus acciones* –elaborando Guías de Apoyo– de acuerdo con los análisis de los resultados que producen los alumnos al responder por la Guía de Trabajo, en contraste con los resultados esperados de acuerdo con ciertos supuestos *a priori* que definieron el tipo de situaciones.

[11] Situación matemática específica del conocimiento **C** "[...] tal que, por sí misma, sin apelar a razones didácticas y en ausencia de toda indicación intencional, permita o provoque un cambio de estrategia en el jugador. Este cambio debe ser (relativamente) estable en el tiempo y estable respecto a las variables de la situación." (Chevallard, Y., Bosh, M., y Gascón, J, 1997. p. 214). El término se opone a *situación didáctica* que se refiere a "las relaciones establecidas explícitamente e implícitamente entre los alumnos, un cierto medio (que incluye instrumentos y objetos) y el profesor, con el objetivo de que los alumnos aprendan el conocimiento matemático C" (Ídem, p. 217). Sin embargo, las situaciones adidácticas artificiales que se plantean en el aula son parte del *medio* en el que se desarrollan las situaciones didácticas que le dan sentido y significado a la situación matemática específica del conocimiento **C**.

Esta estrategia de Guías de trabajo y Guías de Apoyo busca hacer operativa la *ley fundamental del aprendizaje* de Vigotsky, según la cual, **todo lo que se enseñe por encima del desarrollo potencial del alumno** –determinado por lo que puede realizar con la ayuda del experto– **no se aprende**; **y todo lo que se enseña en su nivel actual de desarrollo**–determinado por lo que el aprendiz puede hacer por sí mismo– **ya lo sabe**. La Guía de trabajo es el instrumento que potencialmente puede ser mediador de las acciones y, para que realmente lo sea, se complementa con las Guías de apoyo teórico, para ajustar las acciones de acuerdo al estado real de conocimientos de los estudiantes.

Nuestra *estrategia socioconstructivista* (cf. Delgado, 1998) se diferencia del modelo tradicional –que fundamenta la enseñanza en la lógica de la explicación– en dos aspectos fundamentales:

1. *La teoría y las técnicas matemáticas* **no son un producto acabado u obra muerta** que se expone al estudiante para que las aprenda y en algún momento las aplique a la solución de situaciones fuera del aula. Por lo contrario, al igual que el Saber que elaboran los matemáticos, son el producto de la solución de situaciones problema que, en este caso, enfrenta el estudiante con la ayuda de la mediación del profesor. Por consiguiente ésta teoría y aquellas técnicas que se seleccionan para ser enseñados a las nuevas generaciones **son una obra viva y siempre inacabada** para responder a los problemas susceptibles de una matematización.
2. *Se obliga a un cambio de las actividades tradicionales del profesor y del estudiante:* el primero **no es más el poseedor del saber** que centra su actividad de enseñar en la administración de "buenas explicaciones", sino que, en el marco socioconstructivista, **es más un diseñador y gestor de situaciones** adidácticas relacionadas con el conocimiento objeto de la enseñanza, que media los procesos aprendizaje; y el segundo, **pasa de ser un receptor** del conocimiento acabado, transformado y modelado por la explicación del profesor, **a ser un sujeto** que desarrolla una actividad de estudio en la **que construye activamente** su propio conocimiento con el objetivo de aprender matemáticas.

El primer aspecto se relaciona fundamentalmente con la actividad del profesor y en particular con el diseño de La Guía de trabajo y la Guía de Apoyo Teórico. Como ya lo hemos dicho, la Guía de trabajo expresa el conjunto fundamental de situaciones **S(C)** que se construye considerando las variables didácticas *–valores de la situación que obligan a un cambio de estrategia en una situación adidactica* S_i*–* que obliga a modificar un estado de conocimiento hacia otro mejor adaptado a la situación.

Estas variables didácticas se determinan a partir de:

- un estudio de la *naturaleza del conocimiento matemático* – dimensión epistemológica;
- el *estado de conocimiento actual de los estudiantes* – dimensión cognitiva; y
- la *gestión de los medios y procesos* de enseñanza y aprendizaje – dimensión didáctica.

El segundo aspecto se refiere tanto a la actividad de gestión del profesor como a la actividad constructiva del estudiante. Decimos que "se obliga a un cambio de las actividades tradicionales..." porque cuando *el profesor evita proporcionar, directamente, el conocimiento* que es necesario para resolver la situación adidáctica, el alumno ineludiblemente tendrá que *actuar* usando su propio repertorio de conocimientos para alcanzar el éxito en la tarea –situación adidáctica de acción (**SA**)–;

y luego, cuando se ve obligado a compartir con los otros y comunicar el producto de su acción, *verbaliza y simboliza* sus acciones –situación adidáctica de formulación (**SF**)– y, dado que son inevitables las demandas de explicaciones o cuestionamientos de sus pares, deberá tratar de convencer sobre la validez de sus resultados –situación adidáctica de validación (**SV**). En este conjunto de momentos o situaciones adidácticas de la enseñanza, el profesor toma cierta distancia, pero está atento para hacer que las situaciones adidácticas evolucionen de acuerdo con el aprendizaje del saber matemático **C** propuesto.

El funcionamiento adidáctico es posible si el profesor genera un marco didáctico que tiene como función la regulación de la situación adidáctica. El profesor en situación didáctica *observa las acciones de los estudiantes y* en concordancia con ellas *actúa produciendo retroalimentaciones* (positivas o negativas) para llenar lagunas –carencia de ciertos conocimientos auxiliares necesarios para alcanzar **C** (pero nunca el conocimiento **C** que es el objeto de aprendizaje)– o para generar conflictos cognitivos con respecto a los conocimientos obstáculo[12] que estén presentes en el estudiante –situación didáctica de devolución de problema (**SD**). También el profesor actúa para reconocer que el conocimiento construido por el estudiante es un saber matemático de pleno derecho –situación de institucionalización (**SI**). Estas acciones del profesor siempre están articuladas con las acciones del aprendiz sobre la situación adidáctica y es una respuesta a ellas para provocar el cubrimiento de una laguna o la superación de un conocimiento obstáculo.

En resumen se espera que como resultado de la operacionalización de los dos aspectos del modelo, el conocimiento **C** sea el resultado de satisfacer las variables de la siguiente función de conocimiento:

$$\mathbf{C = SA + SF + SV + SD + SI}$$

Y, en consecuencia, cada Guía define la estructura de la *secuencia didáctica* y cumple la función de instrumento mediador, de las acciones didácticas del profesor en el proceso de enseñanza y de las acciones de los estudiantes en su proceso aprendizaje.

Cómo se usaban las guías

En la primera semana del curso de Cálculo I tomamos conciencia de la magnitud de la brecha entre las demandas que planteaba el programa del curso y el estado de la formación matemática de los estudiantes; obligándonos a elaborar nuevas Guías de las siete inicialmente elaboradas, teniendo presente que más que trabajar sobre contenidos, buscábamos *incidir en el desarrollo de ciertas competencias para:*

- *utilizar lenguaje matemático*,
- *razonar matemáticamente* e
- *imaginar mundos posibles*

---

[12] Es un conocimiento que funciona en ciertas situaciones que ha tenido su éxito, pero que en otras resulta inadecuado, genera errores o resulta ineficiente. Es difícil de modificar y no es idiosincrásico, pero es necesario para construir el conocimiento nuevo.

De esta manera, nuestro objetivo de fondo en la gestión de cada una de las guías consistió en ***transformar –mediante el desarrollo de la actividad conjunta en torno al objeto de aprendizaje– la tendencia a pensar la actividad de estudio de las matemáticas como aprendizaje de fórmulas y algoritmos.***

La función del texto de Cálculo

En concordancia con nuestra estrategia socioconstructivista el texto no constituye el centro de gravedad de la enseñanza ni del aprendizaje. Aquí el texto cumple la función de ser una voz autorizada que es invitada para acompañar *la actividad de estudio* de la obra matemática que profesor-estudiante desarrollan en el aula de matemáticas.

En nuestro caso, elegimos el texto de Tom Apostol por la manera como allí se escribe la matemática, el rigor con que se presentan y validan las proposiciones matemáticas y la forma como se introduce y relacionan los temas en torno a los conceptos fundamentales del cálculo. Pero, en especial, el texto nos apoyó en la búsqueda del *equilibrio, entre la técnica, la teoría y la justificación de ésta,* tan necesario para alcanzar no sólo una "comprensión práctica" (Plano del conocimiento en la acción), sino evolucionar hacia la "comprensión conceptual" (plano del conocimiento conceptual) hasta lograr la "comprensión reflexiva" (plano del conocimiento reflexivo).

Nuestra metodología pretende que el alumno *aprenda a leer y a escribir matemáticas* para reflexionar y aprender de lo que se lee y se escribe. En consecuencia, se incita desde el comienzo, en las guías de trabajo y de apoyo teórico, a escribir, discutir lo que se escribe –consigo mismo y con otros–, corregir y volver a escribir. En este marco, el texto es un referente autorizado al cual se accede por la lectura y se constituye en un instrumento que ayuda al profesor a alimentar la reflexión y orientar la escritura de las ideas de los estudiantes.

La metodología y el contrato didáctico

La metodología obligaba a los estudiantes a trabajar antes de la clase las situaciones de la Guía y a usar el encuentro con los asistentes de docencia en el Taller (2 h/s) para aclarar dudas y recibir retroalimentaciones a fin de realizar su obra matemática. En las clases (dos, espaciadas por un día, de 1,5 h/s cada una), el profesor también trabajaba con los estudiantes a partir de sus preguntas sobre el tema asignado en la Guía, y trataba de desarrollar una interactividad para afectar los procesos cognitivos que orientan las acciones de los alumnos. Buscaba que se produjeran los aprendizajes, pero sin dar respuestas directas que fueran solución de la situación.

Con estas ayudas el estudiante desarrollaba una *producción escrita* sobre situaciones de la Guía previamente asignadas –la tarea–, y la entregaba *semanalmente* a los asistentes de docencia para su corrección. Sin embargo, conviene subrayar que mediando el aprendizaje bajo la *lógica de la construcción* y no con la *lógica de la explicación* necesariamente se avanza más lentamente: la *comprensión* es un proceso lento en el que se siembra la semilla del entendimiento y para que se convierta en fruto hay que realizar un cuidadoso seguimiento e invertir tiempo.

El profesor diseñaba una prueba corta semanal sobre los puntos de la tarea, y se aplicaba el mismo día en que los estudiantes entregaban la tarea. En el encuentro siguiente a la entrega de las tareas, los asistentes de docencia devolvían a los estudiantes las tareas corregidas y comentadas, así como los resultados de la prueba corta. En este momento, los asistentes de docencia, tomando en consideración los resultados, y las retroalimentaciones escritas por ellos en cada tarea o prueba, discutían con los alumnos los puntos en los que se habían detectado aprendizajes deficientes. Luego, los asistentes de docencia informaban al profesor, en un formato especial, cuáles habían sido los resultados en términos de lagunas y obstáculos más frecuentes presentes en los estudiantes. Esta información era la base con la cual el profesor planificaba el trabajo de la semana siguiente.

Es evidente que la metodología sobre la cual se fundó todo el curso rompía el *contrato didáctico*[13] sobre el cual se había basado toda su escolaridad: la manera de concebir las clases centrada en la interactividad entre el profesor y los estudiantes en torno a los objetos de aprendizaje; los talleres basados en lo que, según las tareas y pruebas cortas, veíamos que aún no se había comprendido; la retroalimentación escrita como comentarios referidos a sus procesos de razonamiento matemático, empleo del lenguaje matemático en los procesos de construcción, formulación y validación de los conocimientos matemáticos que se observaba en las tareas, y la exigencia de toma de conciencia del error que este modo de proceder le plantea a los alumnos como fuente y condición necesaria para el aprendizaje.

El equipo de asistentes y el profesor eran conscientes de las rupturas del contrato didáctico necesarias para avanzar en el objetivo central del curso piloto de *disminuir la deserción* de los planes de ingeniería y al mismo tiempo plantear *altos niveles de comprensión* de las matemáticas. De esta manera, parte del trabajo del equipo docente era resolver con el diálogo razonado las crisis y superar las rupturas actualizando las obligaciones implícitas del contrato.

El contrato didáctico

El contrato que pusimos en práctica se fundamenta en cinco *principios*, propios de un proceso de enseñanza-aprendizaje de un curso básico. Ellos son:

Primero: Sólo interesa aquello que es fundamental y básico.

Segundo: La necesidad es generadora de conocimiento.

Tercero: La reflexión sobre el error es importante.

Cuarto: Interesa la superación del error.

Quinto: Se aprende haciendo.

---

[13] "Es el conjunto de las obligaciones recíprocas y de las «sanciones» que cada socio de la *situación didáctica*

- impone o cree imponer, explícita o implícitamente, a los otros
- y aquéllas que se le imponen o que cree que se le impone, con respecto al conocimiento en cuestión. El contrato didáctico es el resultado de una «negociación» a menudo implícita de las modalidades de establecimiento de las relaciones entre un alumno o un grupo de alumnos, un determinado medio y un sistema educativo. Se puede considerar que las obligaciones del profesor frente a la sociedad que le delega su legitimidad didáctica son también una parte determinante del «contrato didáctico»." Brousseau, 2003, pp. 5-6)

El objeto del contrato, cuyas clausulas en su mayor parte son implícitas, es la enseñanza y el aprendizaje del saber matemático y este contrato, que obliga al profesor a enseñar y al alumno a aprender, regula el funcionamiento del curso –*sistema didáctico*: definido por las relaciones entre el profesor, los alumnos y el saber objeto de la enseñanza. ***Las rupturas del contrato generan crisis*** que se toman como verdaderas oportunidades de progresar y *superar estados de funcionamiento del sistema didáctico* que impiden o limitan el acceso al nuevo conocimiento. En el curso de cálculo II, alrededor de la sexta semana se viven estas rupturas: cuando los estudiantes exigen "clases magistrales..."; "ir un poquito más rápido..." y reclaman al profesor por su flexibilidad para volver a discutir aquello que no se ha comprendido; o cuando exigen que "se les enseñe las matemáticas sin física…". Estas rupturas cuyas manifestaciones se señalan entre comillas [14], se encuentran registradas en videos.

Expectativas del equipo docente

Existe una brecha entre las *matemáticas formales* que se enseñan en la escuela y las *matemáticas idiosincrásicas* que las personas aplican para resolver los problemas de la vida cotidiana. Esta brecha se puede caracterizar en términos de las diferencias entre tres planos de representación del conocimiento humano (c.f. Piaget, 1985, pp. 268-271): Conocimiento práctico, conceptual y reflexivo. En el primero la comprensión queda limitada al funcionamiento aislado de esquemas de acción con acomodación momentánea a datos particulares muy limitados. Por ejemplo, el cálculo de antiderivadas por la aplicación de una regla. El segundo, implica una comprensión conceptual que resulta de acciones sobre representaciones semiotizadas e imágenes mentales y por tanto implican asimilaciones y acomodaciones –recíprocas– entre esquemas; es decir, operan sobre los mismos esquemas de acción, más que sobre los objetos externos. Por ejemplo, la regla que permite el cálculo de una antiderivada ahora se explica en términos de la operación de paso al límite aplicada a una función de pendientes de rectas secantes ancladas en un punto. Por último, la *comprensión reflexiva*, propia del tercer plano del conocimiento, se obtienen operando sobre esquemas conceptuales constituidos anteriormente.

> Su mecanismo formador, consistente en operaciones de segunda potencia –es decir, en operaciones nuevas, pero efectuadas sobre las anteriores– demuestra que se trata, una vez más, de abstracciones que parten del plano precedente, pero compuestas y enriquecidas según combinaciones hasta entonces no realizadas. (Piaget, 1985, p. 270):

Por ejemplo, la comprensión de la definición (ε-δ) del concepto de límite, es reflexiva. Implica operar sobre esquemas conceptuales como función, número real, vecindad abierta, entre otros, y usar lógicas de segundo orden donde los cuantificadores operan sobre proposiciones cuantificadas para abstraer la definición:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\ \delta > 0\ (\forall x \in D_f\ (|x - p| < \delta\ \Rightarrow |\ f(x) - f(p)| < \varepsilon\ ))).$$

[14] Las expresiones entre comillas corresponden a estudiantes del curso Piloto de Cálculo II y se pueden consultar en el video "*Cruce de miradas*", minutos 10 a 13. Disponible en el Instituto de Psicología, Proyecto Universidad y culturas e-mail: uniculturas@univalle.edu.

Rupturas, reconstrucciones y pensamiento formal

En la comunidad de didáctas de las matemáticas se comparte la idea que el aprendizaje de las matemáticas no es un proceso continuo. Por lo contrario, el aprendizaje y la comprensión exige que se tome en cuenta rupturas y reconstrucción de conocimientos ya adquiridos: para asimilar nuevos objetos a una estructura conceptual ya establecida, ampliar el dominio de un campo conceptual, coordinar campos conceptuales que permanecían aislados o para abstraer lo que existe en un plano de comprensión (práctica, conceptual o reflexiva) y proyectarlo sobre otro más abstracto. Este trabajo está a cargo del profesor y el conocimiento de tales rupturas se obtiene del conocimiento histórico de la evolución de las ideas matemáticas y de los informes de los estados de conocimiento de los alumnos.

Respecto al último tipo de reconstrucciones necesarias para el aprendizaje, generalmente, la escuela secundaria trabaja la comprensión práctica y conceptual y quizás más la primera. La ruptura entre la formación matemática que resulta de estas prácticas de enseñanza y la demanda cognitiva que plantea el trabajo para alcanzar una comprensión reflexiva es evidente.

Además, esta brecha genera actitudes y creencias negativas respecto de las matemáticas escolares. Tales actitudes y creencias ofrecen una gran resistencia a los procesos de formulación, generalización, esquematización, validación y elaboración de conjeturas. Estos procesos son los que permiten superar la mera *comprensión práctica* –limitada a la asimilación de los objetos a esquemas de acción aislados, con acomodaciones momentáneas a un conjunto restringido de situaciones– y estimular el progreso hacia una *comprensión conceptual* que enriquece los esquemas de acción con representaciones semiotizadas haciéndolos más flexibles, al acceder a un mayor número de asimilaciones recíprocas, y amplia sus poderes en extensión y comprensión hasta alcanzar la *comprensión reflexiva* que permite construir un conocimiento más estructural y por tanto más equilibrado. Este conocimiento reflexivo posee la flexibilidad necesaria para adaptarse a nuevas situaciones en ausencia de la influencia de la escuela.

Nuestras expectativas, respecto al cierre de esta brecha, se centraron en la modificación de las actividades de enseñanza y de estudio de las matemáticas, seguros de que aquellos estudiantes que en el modelo de enseñanza tradicional están destinados al fracaso –65% de la población de ingenierías–, tienen, sin embargo, excelentes desempeños cuando aplican sus conocimientos no formalizados (idiosincrásicos) para resolver problemas complejos que surgen en situaciones de la vida cotidiana. Esperábamos poder cerrar esta brecha ofreciendo un espacio real, en el aula de matemáticas, al *conocimiento idiosincrásico*, al libre *discernimiento* y a la *imaginación*, para construir conocimiento matemático y, luego una vez esquematizado y formalizado, reconocer su generalidad y eficacia para resolver toda una clase de situaciones –proceso de descontextualización y despersonalización.

Consideramos que para ofrecer una efectiva oportunidad a los estudiantes que ingresan por “régimen de excepción” y permitir su continuidad en el sistema educativo, además de exigir las *transformación de las prácticas de enseñanza* tradicionales *y de las prácticas de estudio* de los alumnos, era necesario *respetar celosamente sus ritmos de aprendizaje*, lo cual generaría un “*atraso inicial*” en el desarrollo de los contenidos del curso de acuerdo al programa oficial. A este respecto, esperábamos que en cierto momento, cuando los alumnos dispusieran de ciertos “instrumentos” de conocimiento básicos para acceder a una comprensión reflexiva, los ritmos se acelerarían y se podría cubrir los temas que faltaran. Sin embargo, la realidad nos mostró que para la mayoría de los alumnos el crecimiento de su curva de aprendizaje era lento y no alcanzaron, durante el primer semestre, el punto de inflexión que cambiara esta tendencia.

En el segundo semestre, esperábamos que esta estrategia socioconstructivista permitiera cubrir los temas que quedaron pendientes de cálculo I y los programados para cálculo II. Sin embargo existían reservas respecto al cumplimiento de la meta propuesta, por tres razones: 1) *las expectativas fueron demasiado optimistas* respecto al nivel de formación matemática de esta población que ingresa por régimen de excepción, no obstante que preveíamos que el nivel era bajo, 2) el *atraso significativo* en los temas de cálculo I y 3) por *la lentitud en que se modificaban los métodos de estudio* de los alumnos y *la resistencia* que oponían al cambio.

El equipo siempre fue consciente del atraso en los contenidos y los problemas curriculares que ello ocasionaba. Sin embargo, se estaba seguro de que la experiencia estaba transformando –de forma lenta pero segura– la manera como los alumnos se relacionan con las matemáticas y con otros saberes, lo que podría subsanar en parte los desfases curriculares en el corto plazo, si se contaba con ayudas puntuales del profesor y los asistentes de docencia, para cubrir la parte algorítmica de la matemática necesaria para las demandas más inmediatas de cursos como el de física.

Otro aspecto preocupante al momento de iniciar el curso de cálculo II fue la gran cantidad de tema por cubrir en el semestre. Sin embargo, anotamos en el informe final de cálculo I que:

> Nuestra hipótesis es que a medida que los estudiantes maduren en estos conocimientos y formas de hacer matemáticas podrán gradualmente alcanzar ritmos más acelerados de aprendizaje y ser más independientes de las explicaciones del profesor." (Informe de Cálculo I. 2006)

En el mismo informe premonitoriamente afirmamos:

> Se espera que en el curso de Cálculo II se pueda cubrir el programa y en su defecto proponer la continuación del curso en el verano (intensivo) para cubrir los temas pendientes de Calculo I y II. (Informe de Cálculo I. 2006.)

Y así fue que tuvimos que extender el curso en el verano para cumplir con nuestro compromiso inicial de cubrir los contenidos de Cálculo I y II en un año, pero siguiendo los ritmos de aprendizaje de los estudiantes y no los ritmos de la explicación del profesor, cumpliendo con nuestra estrategia y objetivo inicial.

RESULTADOS DE LOS CURSOS PILOTO

Características del "quehacer" matemático de estos jóvenes en Cálculo I

Un propósito central del nivel I era lograr que los estudiantes tomaran conciencia de sus errores y de sus dificultades, como condición necesaria para poderlos superar. El curso estaba basado en las prácticas de aprendizaje o, dicho en otros términos, en la interactividad que se despliega en la clase entre el profesor, los asistentes de docencia y los alumnos, en torno a un saber matemático contextualizado en situaciones propuestas y en un medio en el que se construyen significados matemáticos socialmente compartidos.

Dificultades iniciales – Cálculo I	*Logros – Final de Cálculo II*
* Ni el profesor ni los asistentes anticiparon los niveles tan bajos de conocimiento matemático de sus alumnos. A pesar de experiencias previas de formación, creían que podrían dedicar unas pocas semanas a fortalecer matemáticas fundamentales y luego sí pasar a los temas de Cálculo I. Cuando el semestre terminó, sólo habían visto 1 de los 8 temas de este curso. * Para los estudiantes no resultó fácil cambiar sus hábitos en la forma de aprender los conceptos. Estaban acostumbrados a que el profesor les diera la teoría – por ejemplo una definición – y luego les pusiera ejercicios de aplicación. * Creían que estudiar Cálculo era memorizar los procedimientos y fórmulas, haciendo ejercicios que exigen aplicar eso que ya fue grabado en la memoria. Por tanto, para ellos ganar los exámenes significaba que sí habían entendido y aprendido. * Pedían teoría, pero que "se las explicaran fácil". Esperaban que el profesor diera la clase para ellos anotar lo que él escribió y demostró, convirtiéndo así lo enseñado en una verdad que no requiere ser pensada sino solamente aceptada. * Crisis. A las pocas clases los alumnos comenzaron a desmotivarse, ya que en éstas no se avanzaba mucho y les resultaban monótonas, pues siempre se retomaban los mismos temas debido a que aún no comprendían los conceptos. * Querían avanzar en los temas, no en las formas de razonar, ni en reconocer los errores en que se fundaban sus saberes matemáticos previos. Pedían que el profesor fuera más rápido y se angustiaban porque en los otros cursos de Cálculo ya hubieran visto muchos temas. * Para el equipo de asistentes en docencia igualmente resultaba difícil aceptar el ritmo lento de avance, y las crisis del grupo.	* Aceptaron que para aprender Cálculo deben comprender y apropiarse de las matemáticas como un lenguaje, y aprender a utilizarlo rigurosamente para razonar con él. * Entendieron que los errores deben ser la base de un nuevo aprendizaje. Aceptaron que el ritmo de avance dependía de su posibilidad de reconocer el error en su conceptualización y razonamientos para así lograr superarlo. * Aceptaron que el profesor les propone problemas y son ellos quienes deben pensar para buscar, razonando matemáticamente, la solución. Al final de Cálculo II, impedían que el nuevo asistente les ayudara a resolver los problemas. * Comprendían que si razonan matemáticamente pueden solucionar problemas en las Ciencias; que Física y Álgebra se volvían manejables gracias a su nueva manera de razonar, y a los conceptos comprendidos. * Querían aprender y ser agentivos en su proceso: conocer previamente los temas para prepararlos, dedicar el tiempo que fuera necesario (sus vacaciones de verano) para dominar los temas que les faltaban. * Se transformaron sus prácticas de estudio. Tomaron conciencia respecto a los medios intelectuales de los que se sirve la acción exitosa. * Comprendieron que se aprende haciendo. Es en situaciones de aplicación clara y bien definida donde el saber cobra interés, y aparece como necesario para dar significado y sentido a la situación. * Tanto el profesor[15] como los estudiantes de Cálculo II aceptaron sacrificar sus vacaciones de verano y hacer clases diarias de 4 horas para completar los temas de Cálculo II. Con lo cual, en un semestre vieron Cálculo I y Cálculo II.

[15] El curso de Cálculo II estuvo igualmente a cargo del profesor César Delgado G. y Liliana Posada como asistente de docencia; en el verano, el asistente fue Carlos Ernesto Ramírez.

El curso de cálculo I lo matricularon 61 alumnos y lo ganaron 29 (47,5%). Para el curso piloto de cálculo II, de los 29 que aprobaron cálculo I, se matricularon 26 en el grupo Piloto de Cálculo II –dos no matricularon cálculo II y uno Matriculo Cálculo II en un grupo genérico y lo ganó con una nota de cuatro coma cuatro (4,4); posteriormente matriculó cálculo III y también lo aprobó (4,1). Al grupo de cálculo II Piloto ingresó una estudiante que no tomó el curso piloto de cálculo I y aprobó cálculo II piloto (3,5). Así, finalmente, el grupo se conformó con 27 alumnos. El curso piloto de cálculo II lo aprobaron 20 estudiantes (74,1%), lo perdieron 7 (25,9%). De estos, al siguiente semestre, 8 matricularon el curso normal de cálculo III y el 100% lo aprueban con una nota promedio de 4,0. Dos han ganado estímulos académicos: uno de ellos, ha obtenido en tres ocasiones estímulos en Ingeniería Civil, y otro, en Ingeniería de Alimentos. Todos los estudiantes que aprobaron cálculo II, transcurridos cinco semestres, terminaron con éxito la componente matemática de sus planes de estudio.

Debe destacarse, además, que quienes tomaron los cursos piloto de Cálculo I y II han logrado una permanencia del 65% en el ciclo básico de Ingenierías. [16] El informe compara estas cifras con los estudiantes de excepción étnica que matricularon cálculo I regular en el período febrero a junio de 2005, quienes tuvieron una deserción del 62,5%.

CONCLUSIONES

A) Respecto al objetivo principal

> *Proporcionar una oportunidad real a los estudiantes que ingresan por condición de excepción étnica a los planes de ingenierías, para acceder a los conocimientos científicos y tecnológicos de que se ocupa la Universidad del Valle.*

El objetivo se logró. Sin embargo, es posible obtener mejores resultados si la estrategia didáctica de los cursos piloto se adopta como una práctica institucional que no sólo comprometa a un grupo de manera aislada, sino que sea aplicable a los cursos básicos de matemáticas y, en lo posible, extenderla a los cursos de ciencias del ciclo básico.

Se demostró, con el caso de los estudiantes que aprobaron cálculo II y matricularon al siguiente cálculo III –con una aprobación de 100% y una nota promedio de 4.0–, que si se enfrentan las dificultades en los dos primeros semestres se evita que en los semestres avanzados se presenten pérdidas de materias y se mejoren los rendimientos en los cursos avanzados, con la ganancia que ello significa para el aprendizaje de los contenidos de la componente profesional de los diferentes planes de estudios.

Es una estrategia equivocada tratar de eliminar cursos o incluso agregar cursos sin estar seguro que con ello se afecta positivamente la fundamentación básica para el desarrollo de la componente profesional.

---

[16] La tasa de deserción para Ingenierías en el año 2000 en el ciclo básico –los dos primeros años– del **58.02%,** con tendencia al alza en la medida en que la universidad aumente su cobertura si no varía su actual estrategia de recepción. En promedio, el peso de la deserción en el ciclo básico representa el 64.7% de la deserción total.

B) Respecto a la estrategia didáctica

> *Encontrar una manera de apoyarse en la experiencia de los alumnos y en su inteligencia práctica para desarrollar un pensamiento formal matemático y lograr el trabajo del alumno sobre sí mismo, para darse forma así mismo y convertirse en constructor de su propio conocimiento matemático*

Se comprobó que la estrategia didáctica socioconstructivista, obliga a un cambio de las actividades tradicionales del profesor y del estudiante: el primero **no es más el poseedor del saber** que centra su actividad de enseñar en la administración de "buenas explicaciones", sino que, en el marco socioconstructivista, **es más un diseñador y gestor de situaciones** adidácticas relacionadas con el conocimiento objeto de la enseñanza, que media los procesos aprendizaje; y el segundo, **pasa de ser un receptor** del conocimiento acabado, transformado y modelado por la explicación del profesor, **a ser un sujeto** que desarrolla una actividad de estudio en la **que construye activamente** su propio conocimiento con el objetivo de aprender matemáticas.

Si bien *esta estrategia es costosa por el tiempo que demanda y por la resistencia que presentan los alumnos a modificar los viejos hábitos de estudio*, también es cierto que las ganancias que se obtienen en el mediano y largo plazo: a) retribuyen *a la universidad* pues los alumnos llegan mejor dotados matemáticamente a la componente profesional, se evitan costos por pérdidas en las materias de los semestres superiores y seguramente se mejora la calidad de los egresados; y b) *a los alumnos*, quienes aprovechan mejor los cursos y desarrollan modos críticos para actuar en el medio, poniendo en práctica, además del saber matemático, un conjunto de valores como el reconocimiento de los propios errores, para aprender de ellos, pero sobre todo para aprender de los errores de otros y superar los propios y ayudar a superar los ajenos. Esto es algo que se aprende cuando el modelo didáctico obliga a valora el error y aprender de él.

En resumen, esta estrategia didáctica socioconstructivista mostró que es posible crear ambientes de aprendizaje colaborativos en los que se desarrolla pensamiento matemático y al mismo tiempo se logra que el estudiante *aprenda a aprender*, y a valorar las ayudas del otro.

C) Respecto a la evaluación

Esta experiencia demostró la importancia que tiene desarrollar un sistema de evaluación que sea al mismo tiempo, formativo y sumativo para poder realizar el seguimiento semanal de la calidad de las realizaciones de los alumnos.

Dado que los estudiantes vienen de un sistema escolar que los acostumbró a que la evaluación no tiene rigor ni aporta consecuencias, puesto que al final todos pasan la materia y el año, resulta fundamental implementar una estrategia que los vuelva responsables de su aprendizaje semanal, en la que la revisión y corrección de la tarea les demuestra que sí importa lo que escribe o deja de escribir en sus trabajos semanales.

En resumen, la metodología utilizada en los cursos pilotos de cálculo I y II implementa una innovadora herramienta para prevenir y hacerle seguimiento a la deserción en la educación superior.

D) Respecto a la transferencia de la experiencia

El fracaso en Calculo I y II en todas las universidades es cada vez mayor. Los bachilleres no logran seguir el nivel ni el ritmo expositivo de los docentes, y esto es particularmente cierto con jóvenes procedentes de colegios públicos y de privados de sectores populares. No se trata de que les falten contenidos sino fundamentalmente de que no han rebasado el nivel práctico de las matemáticas como representación en acto; por eso exigen que todo se les enseñe magistralmente, para ellos repetirlo, hacer ejercicios y tranquilizarse suponiendo que "ya dominan el tema". Esto implica que dada la masificación de la educación superior, deben cambiarse las estrategias de enseñanza y de aprendizaje para que los bachilleres accedan a niveles de representación simbólica que les posibilitan un conocimiento matemático formalizado, en lugar de información que repiten sin poder pensar desde ella.

Esta experiencia proporciona elementos importantes para la reflexión sobre el problema del empalme Bachillerato-Universidad y la posibilidad de adoptar políticas e instrumentos que complementen los ya existentes, con el fin de que en los departamentos de servicio, como lo es el de matemáticas en la Universidad del Valle, se estimule la formación de grupos que reflexione permanentemente sobre los problemas que se presentan en la comunicación del Saber y sus relaciones con las demandas de las componentes profesionales.

REFERENCIAS

Brousseau G. (1986). 'Fondements et méthodes de la didactiques des Mathématiques'. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 7, n. 2, pp. 33-115, 1986. Traducción al castellano: 'Fundamentos y Métodos de la Didáctica de las Matemáticas' de Julia Centeno Pérez Begoña Melendo Pardos y Jesús Murillo Ramón. Universidad de Zaragoza.,1989.

Brousseau, G. (2003) *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques*. En:

http://pagesperso-orange.fr/daest/guy-brousseau/textes/Glossaire_Brousseau.pdf

Bruner, J. (2000). *La educación puerta de la cultura*. Visor. España.

Bruner, J. (1979). The Growth of Representational Processes in Childhood. Conferencia presentada en el 18 Congreso Internacional de Psicología, Moscú, 1966. También en Anglin, J. M. (ed.): *Beyond the Information Given.* Nueva York: Norton, 1979. Versión en castellano de Antonio Maldonado. El Desarrollo de los procesos de representación, en: *Jerome Bruner. Acción, Pensamiento y Lenguaje. Compilación de J. Linaza.* Madrid: Alianza ED. Versión consultada, 1995.

Chevallard, Y., Bosch, M., y Gascon, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.* I.C.E.-Horsori. Universidad de Barcelona.

Coll, C. & otros (1995). Actividad Conjunta y Habla. En Fernández B. & Melero Z. M. (compiladores), *La interacción social en contextos educativos*. Siglo XXI. Madrid, pp. 193-326.

De Garay, A. (2004). *Integración de los jóvenes en el sistema universitario. Prácticas sociales, académicas y de consumo cultural de los estudiantes*. Ediciones Pomares, S. A. Barcelona-México.

Delgado, C. (1998). *Estudio Microgenético de Esquemas Conceptuales Asociados a Definiciones de Límite y Continuidad en Universitarios de Primer Curso.* Tesis Doctoral. Publicaciones Universidad Autónoma de Barcelona. España.

Escobar, J., Largo E. y Pérez, C. A. (2006). *Factores asociados a la deserción y permanencia estudiantil en la Universidad del Valle* (1994 – 2006). Documento institucional.

Feynman, R. (1965). *The Character of Physical Law*. M.I.T. Press. Traducción al castellano, *El character de la ley física*. Antoni Bosh editor (1980). Barcelona.

Delgado et al. Grupo de Educación matemática de la Escuela Regional de Matemáticas (1990). *El problema del bajo aprovechamiento estudiantil en los primeros cursos universitarios de matemáticas*. Revista Matemáticas Enseñanza Universitaria. Vol 1, No 1, Mayo,1990

Hadamard, J. (1945). *Psychology of invention in the mathematical field.* Princeton University Press, 1945. Traducción al castellano por L. A. Santaló Sors. Psicología de la invención en el campo matemático. Espasa – Calpe, S. A. Buenos Aires, Argentina, 1947.

Ministerio de Educación Nacional, (2008). *Análisis de determinantes de la deserción en la educación superior colombiana con base en el SPADIES. Primera parte*: Factores socioeconómicos. Factores Académicos e institucionales. Publicación en línea. www.mineducacion.gov.co/

Ministerio de Educación Nacional. (2008). *Análisis de determinantes de la deserción en la educación superior colombiana con base en el SPADIES. Segunda parte*: Deserción estudiantil y resultados de los ECAES. Deserción estudiantil y situación laboral. Efecto de los programas de las instituciones de educación superior para disminuir la deserción estudiantil. Publicación en línea. www.mineducacion.gov.co/

Ministerio de Educación Nacional. (2008). *Deserción estudiantil en la educación superior colombiana: Elementos para su diagnóstico y tratamiento.* Publicación en línea. www.mineducacion.gov.co/

Pérez, L., (2001). Los factores socioeconómicos que inciden en el rezago y la deserción escolar, en *Deserción, rezago y eficiencia terminal en las IES***.** ANUIES, México. Capítulo IV. Publicaciones ANUIES en línea.

http://www.anuies.mx/servicios/p_anuies/index2.php?clave=publicaciones/

Piaget, J. (1974). *La Prise de Conscience*, P.U.F., Paris. Traducción al castellano: *La toma de conciencia.* Morata. Madrid. (Edición consultada 1985).

Piaget, J. & García, R (1982). *Psicogenèsis et histoire des sciences.* Flamarion. París. Traducción al castellano: *Psicogénesis e historia de la ciencia.* Siglo XXI. México, 1982.

Poincaré, H., (l9l3), "Mathematical Creation", en *The Foundations* of *Science.* Traducido al inglés por G. Bruce Halsted (Nueva York, 1913), pág. 387.

Posner, G. (1998). *Análisis del Currículo*. MacGraw Hill, Santafé de Bogotá.

Rusbult, C. (2000). *An introduction to design.* Material en línea, Enero 15, de 2003, en http://www.sit.wisc.edu/-crusbult/methods/intro.htm

Tall, D. (1995). Mathematical Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking, *Proceedings of the Nineteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Recife, Brazil, I, 61–75.

Tall, D. (1995b). Justifying and Proving in School Mathematics. *Institute of Education*., pp. 27-38, Londres, Diciembre.

Tenorio, M. C. (2008). "¿Para qué sirve ingresar a la universidad?", *El Observador Regional*. CIDSE http://elobservador.univalle.edu.co No 6. Cali.

— (2009) "Inclusión social en las universidades", *Posiciones. Revista de la Universidad del Valle.* Nº 3, La Universidad. El futuro de la universidad. Cali.

Vigotsky, L. S. (1996). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores.* Crítica. Barcelona. (Resumen del ensayo original: *Herramienta y símbolo en el desarrollo de los niños.* 1930)